УДК 614.84:664

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук,
В.И. ЛАВИНСКИЙ, д-р. техн. наук, ***С.В. ОЛЬШАНСКИЙ*** (г. Харьков)

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ И РАДИУС-ВЕКТОРА ПРИ ПОЛЁТЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ

Отримані наближені аналітичні вирази нижнього і верхнього значень швидкості і радіус-вектора при плоскому русі краплі. Запропоновані наближені інтерполяційні формули.

The approximately analytical expressions of the bottom and top value of speed and radius - vector are received at a flat drop movement. The approximately interpolation formulas are proposed.

Актуальность темы и анализ имеющихся публикаций. Капли жидкости образуют распылённые струи, которые используются при пожаротушении, поливе растений, мойке и покраске твёрдых поверхностей, а также в других целях. Знание закономерностей движения отдельных капель и струй в целом позволяет повысить эффективность их использования на практике. Поэтому исследование баллистики распылённых частиц жидкости относится к актуальным задачам. Модели полёта капель в газовой среде, с учётом их испарения, представлены в работах [1-3]. При квадратичном аэродинамическом сопротивлении плоское движение частицы жидкости описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Путём некоторых упрощений системы в работах [1,2] удалось построить приближённые аналитические выражения для расчёта траектории движения и оценки дальности полёта капли. Без упрощений такой расчёт приходится проводить численными методами.

Заметим, что односторонние (нижние) оценки параметров движения испаряющейся капли уже получены в статье [4]. Здесь метод работы [4] находит дальнейшее развитие.

Постановка задачи и цель статьи. Ставится задача найти приближённые аналитические выражения нижнего и верхнего значений скорости и радиус-вектора при плоском движении капли. В случае близости двухсторонних оценок такая информация может быть использована для приближённого определения дальности полёта капель, что избавляет от необходимости решать численно систему нелинейных дифференциальных уравнений. Как будет показано ниже, узость оценочных интервалов обеспечивается спецификой рассматриваемой задачи, а именно: малостью массы капли и кратковременностью её движения.

Таким образом, исследования проводится с целью обоснования возможности получения приближённых значений параметров движения жидкой частицы без численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Аналогично [3,4] испаряющуюся каплю считаем сферическим телом, но используем нелинейный закон испарения Срезневского [2].

При квадратичном аэродинамическом сопротивлении дифференциальные уравнения, описывающие процесс движения капли, истекающей под произвольным углом к горизонту, имеют вид

$$\ddot{x} + \frac{k \cdot \dot{x}}{r_0\sqrt{1-\varepsilon t}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0,$$
$$\ddot{y} + \frac{k \cdot \dot{y}}{r_0\sqrt{1-\varepsilon t}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = g \qquad (1)$$

и дополняются начальными условиями

$$\dot{x}(0) = \upsilon_1; \quad \dot{y}(0) = \upsilon_2; \quad x(0) = y(0) = 0. \qquad (2)$$

Здесь υ_1, υ_2 - проекции скорости истечения капли на оси прямоугольной системы координат xoy (ось oy направлена вниз); $x = x(t)$, $y = y(t)$ - координаты капли на траектории полёта.

Скорости $\upsilon(t)$ вертикального падения и подъёма частицы жидкости удовлетворяют дифференциальным уравнениям [5]

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{k}{r_0\sqrt{1-\varepsilon t}}\upsilon^2 = g, \quad \frac{d\upsilon}{dt} + \frac{k}{r_0\sqrt{1-\varepsilon t}}\upsilon^2 = -g. \qquad (3)$$

В выражениях (1),(3) k - коэффициент аэродинамического сопротивления среды; ε - параметр, характеризующий интенсивность испарения капли; r_0 - радиус капли в момент времени $t = 0$; g - ускорение свободного падения; знак плюс перед g соответствует падению, а знак минус - подъёму капли.

Начальное условие к уравнениям (3) принимаем одинаковое

$$\upsilon(0) = \upsilon_0. \qquad (4)$$

Обозначим решения уравнений (3) при начальном условии (4) через $\upsilon_+(t)$ и $\upsilon_-(t)$. Первое берём для знака плюс перед g, а второе – для знака минус. Из физических соображений следует, что при $\upsilon_1 = \upsilon_0 \cos\theta_0$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 \sin\theta_0$ скорость капли, вылетающей под произвольным углом θ_0 к горизонту, удовлетворяет неравенствам

$$\upsilon_-(t) \le \upsilon(t) \le \upsilon_+(t). \qquad (5)$$

Таким образом, двухсторонняя оценка скорости сводится к поиску решений уравнений (3) при начальном условии (4). Такие решения имеют вид [5]

$$\upsilon_-(t)=\frac{a}{b}\frac{c_1Ai'(-\eta)+Bi'(-\eta)}{c_1Ai(-\eta)+Bi(-\eta)},$$

$$\upsilon_+(t)=\frac{a}{b}\frac{c_2Ai'(\eta)-Bi'(\eta)}{Bi(\eta)-c_2Ai(\eta)}. \tag{6}$$

Здесь $a=\sqrt[3]{\frac{2bg}{\varepsilon}}$, $b=\frac{2k}{\varepsilon\cdot r_0}$, $\eta=a\xi=a\sqrt{1-\varepsilon t}$,

$c_1=\frac{ab^{-1}Bi'(-a)-\upsilon_0Bi(-a)}{\upsilon_0Ai(-a)-ab^{-1}Ai'(-a)}$, $c_2=\frac{\upsilon_0Bi(a)+ab^{-1}\cdot Bi'(a)}{\upsilon_0Ai(a)+ab^{-1}Ai'(a)}$, $Ai(\eta)$, $Bi(\eta)$ - функции Эйри; $Ai'(\eta)$, $Bi'(\eta)$ - производные функций Эйри по η. Они протабулированы в [6] и других изданиях по специальным функциям.

Поэтому при наличии таблиц функций Эйри, с помощью формул (5), (6) легко оценить для любого момента времени скорость движения капли на плоской траектории.

Радиус-вектор [7] $R(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$, характеризующий удаление капли от точки вылетания, удовлетворяет неравенством

$$R_-(t)\le R(t)\le R_+(t). \tag{7}$$

Нахождение границ неравенства, сводится к вычислению интегралов

$$R_\mp(t)=\int_0^t \upsilon_\mp(t)dt, \tag{8}$$

в которые следует подставлять выражения (6). Они не "берутся" в элементарных или специальных табулированных функциях. Поэтому, используя результаты работ [4,5], дадим формулы приближённого вычисления интегралов (8).

$$R_\mp(t)\approx S(t)+\frac{1}{2}t[\upsilon_\mp(t)-\upsilon_a(t)], \tag{9}$$

причём
$$S(t)=\frac{r_0}{k}\left(\sqrt{1-\varepsilon t}-1+A\ln\left(\frac{A-\sqrt{1-\varepsilon t}}{A-1}\right)\right), \tag{10}$$

$$\upsilon_a(t)=\left[\frac{1}{\upsilon_0}+\frac{2k}{\varepsilon r_0}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon t}\right)\right]^{-1},\quad A=1+\frac{\varepsilon\cdot r_0}{2k\upsilon_0}.$$

Анализ результатов. С целью апробации изложенной теории проведём расчёт параметров полёта капли при $r_0=10^{-4}$ м, $k=10^{-5}$, $\varepsilon=3$ с$^{-1}$,

$\upsilon_0 = 130$ м/с. Угол истечения капли к горизонту θ_0 принимаем равным 30?. Для него численным решением задачи Коши (1), (2) получаем значения проекций скорости $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$, которые указаны в табл. 1. Там же записаны соответствующие им величины скорости полёта $\upsilon(t) = \left[(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\right]^{1/2}$, а также нижняя и верхняя оценки, вычисленные по формулам (6).

Таблица 1 - Значения $\upsilon(t)$ и её двухсторонние оценки (в м/с)

t, с	$\dot{x}(t)$	$\dot{y}(t)$	$\upsilon(t)$	$\upsilon_-(t)$	$\upsilon_+(t)$
0,02	89,06	51,59	102,93	102,69	103,00
0,05	67,13	39,15	77,71	77,23	77,86
0,10	46,53	27,55	54,07	53,31	54,32
0,15	34,63	20,93	40,47	39,47	40,78
0,20	26,73	16,59	31,46	30,28	31,83
0,25	20,90	13,40	24,83	23,50	25,24

Расчёт показывает, что $\upsilon(t)$ согласуется с двухсторонними аналитическими оценками, которые образуют относительно узкую вилку значений.

Таблица 2 - Значения $R(t)$ и его двухсторонние оценки (в метрах)

t, с	$x(t)$	$y(t)$	$R(t)$	$R_-(t)$	$R_+(t)$
0,02	2,00	1,16	2,31	2,31	2,31
0,05	4,31	2,50	4,99	4,97	4,99
0,10	7,10	4,14	8,22	8,18	8,23
0,15	9,11	5,34	10,55	10,48	10,58
0,20	10,63	6,28	12,34	12,21	12,37
0,25	11,81	7,01	13,74	13,56	13,78

В табл. 2 представлены, вычисленные по формулам (9), (10), границы интервала значений радиуса-вектора на траектории капли в различные моменты времени. Как и для скоростей, наблюдается незначительное расширение оценочной вилки (7) с течением времени, вызванное усилением влияния гравитации на движение капли, которая теряет кинетическую энергию в ходе полёта.

Полученные численным методом $R(t)$ удовлетворяют неравенству (7).

Поскольку границы $\upsilon_{\mp}(t)$ и $R_{\mp}(t)$ соответствуют углам истечения капли $\theta_0 = \mp 90?$ можно с помощью линейной интерполяции, приближённо рассчитать параметры полёта и при других углах θ_0. Этот метод приводит к интерполированным значениям

$$\upsilon_u(t) = \upsilon_-(t) + \frac{90+\theta_0}{180}\left(\upsilon_+(t) - \upsilon_-(t)\right);$$
$$R_u(t) = R_-(t) + \frac{90+\theta_0}{180}\left(R_+(t) - R_-(t)\right). \qquad (11)$$

Сравним в табл. 3 и 4 результаты, полученные по формулам (11), с результатами численного интегрирования системы (1) при начальных условиях (2).

Таблица 3 – Значения $\upsilon(t)$, полученные путём численного интегрирования системы (1) (числители) и по интерполяционным формулам (11) (знаменатели) для различных углов истечения

t, с	θ_0				
	-60^0	-30^0	0^0	30^0	60^0
0,02	$\frac{102{,}71}{102{,}74}$	$\frac{102{,}77}{102{,}79}$	$\frac{102{,}85}{102{,}85}$	$\frac{102{,}93}{102{,}90}$	$\frac{102{,}98}{102{,}95}$
0,05	$\frac{77{,}27}{77{,}35}$	$\frac{77{,}39}{77{,}44}$	$\frac{77{,}55}{77{,}55}$	$\frac{77{,}71}{77{,}65}$	$\frac{77{,}82}{77{,}76}$
0,10	$\frac{53{,}38}{53{,}49}$	$\frac{53{,}57}{53{,}65}$	$\frac{53{,}82}{53{,}82}$	$\frac{54{,}07}{53{,}98}$	$\frac{54{,}26}{54{,}15}$
0,15	$\frac{39{,}56}{39{,}69}$	$\frac{39{,}81}{39{,}91}$	$\frac{40{,}14}{40{,}13}$	$\frac{40{,}47}{40{,}35}$	$\frac{40{,}70}{40{,}57}$
0,20	$\frac{30{,}39}{30{,}54}$	$\frac{30{,}68}{30{,}80}$	$\frac{31{,}08}{31{,}06}$	$\frac{31{,}46}{31{,}32}$	$\frac{31{,}74}{31{,}57}$
0,25	$\frac{23{,}63}{23{,}79}$	$\frac{23{,}96}{24{,}08}$	$\frac{24{,}40}{24{,}37}$	$\frac{24{,}83}{24{,}66}$	$\frac{25{,}13}{24{,}95}$

Сравнение интерполированных значений с результатами численного решения задачи Коши показывает, что формулы (11) дают приемлемую точность расчёта как для скорости так и для радиус вектора.

Таблица 4 – Значения $R(t)$, полученные путём численного интегрирования системы (1) (числители) и по интерполяционным формулам (11) (знаменатели) для различных углов истечения

t, с	θ_0				
	-60^0	-30^0	0^0	30^0	60^0
0,02	$\frac{2,31}{2,31}$	$\frac{2,31}{2,31}$	$\frac{2,31}{2,31}$	$\frac{2,31}{2,31}$	$\frac{2,31}{2,31}$
0,05	$\frac{4,97}{4,98}$	$\frac{4,98}{4,98}$	$\frac{4,98}{4,98}$	$\frac{4,99}{4,99}$	$\frac{4,99}{4,99}$
0,10	$\frac{8,18}{8,19}$	$\frac{8,19}{8,20}$	$\frac{8,20}{8,20}$	$\frac{8,22}{8,21}$	$\frac{8,23}{8,22}$
0,15	$\frac{10,47}{10,49}$	$\frac{10,50}{10,51}$	$\frac{10,53}{10,53}$	$\frac{10,55}{10,54}$	$\frac{10,58}{10,56}$
0,20	$\frac{12,21}{12,24}$	$\frac{12,25}{12,27}$	$\frac{12,29}{12,29}$	$\frac{12,34}{12,32}$	$\frac{12,37}{12,34}$
0,25	$\frac{13,55}{13,60}$	$\frac{13,60}{13,63}$	$\frac{13,67}{13,67}$	$\frac{13,74}{13,71}$	$\frac{13,79}{13,74}$

Выводы. Работа подтвердила возможность двухсторонних аналитических оценок величин скорости и радиус-вектора на плоской траектории полёта капли без численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Применение интерполяционных формул позволяет с приемлемой точностью вычислять параметры полёта капли, вылетающей под произвольным углом к горизонту.

Список литературы: 1. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Ларін О.М., Фомін Є.М.* Балістика крапель розпилених вогнегасних рідин. – Біла Церква, 2006. – 124 с. **2.** *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М.* Моделювання польоту крапель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006.–204 с. **3.** *Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев. ГТУ, 1996. – 260 с. **4.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Нижняя оценка дальности полёта испаряющихся капель распылённых огнетушащих веществ // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХДТУБА. – 2006. – Вип. 35. – с. 188 – 193. **5.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О нелинейной модели падения испаряющейся капли, как материальной точки переменной массы // Механика и машиностроение. – 2006. – № 1. – С. 23-28. **6.** *Абрамовиц А., Стиган И.*, Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832с. **7.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту предельной дальности подачи испаряющихся тонкораспылённых огнетушащих веществ установками импульсного пожаротушения // Пожаровзрыво-безопасность. – 2005. - № 4. – С. 67 – 70.

Поступила в редколлегию 30 .03.07